Universidad Tecnológica de la Mixteca

División de Estudios de Posgrado

Doctorado en Modelación Matemática

**Guía de estudios para examen de admisión 2017**

## Temas de Análisis Matemático

### Análisis Real

1. Nociones de conjuntos y funciones: operaciones entre conjuntos, álgebra de conjuntos, familias de conjuntos, conjuntos finitos, conjuntos numerables.
2. Números reales: axiomas de campo, de orden y del supremo, propiedades de valor absoluto, propiedad arquimediana.
3. Sucesiones: sucesiones y límites de sucesiones, propiedades de los límites, sucesiones monótonas, subsucesiones y criterio de Cauchy.
4. Límites de funciones: definición, propiedades, teoremas sobre límites, límites laterales, límites infinitos y límites en infinito.
5. Continuidad de funciones: tipos de discontinuidad, teorema del valor intermedio y teorema del máximo.
6. Derivación: interpretación geométrica de la derivada, propiedades, reglas de derivación, regla de la cadena, derivación implícita y derivadas de orden superior.
7. Aplicaciones de la derivada: rapidez de variación, extremos de funciones, teorema de Rolle y del valor medio, análisis de gráficas de funciones, regla del L'Hospital y problemas de optimización.
8. Integración: Integral definida, propiedades y teorema fundamental del cálculo.
9. Métodos de integración: Cambio de variable, por partes, por sustitución trigonométricas y por fracciones parciales.
10. Aplicaciones de la integral: área de una región entre dos curvas, volúmenes, longitud de arco, área de superficie, momentos, centros de masa, centroides y, presión y fuerza de un fluido.
11. Series: convergencia, serie armónica, serie p, comparación de series, series alternantes, criterios del cociente, criterio de la raíz, y polinomios de Taylor y aproximación.

### Análisis de funciones de varias variables

1. Límites y continuidad.
2. Derivadas parciales y diferenciabilidad.
3. Regla de la cadena, derivadas direccionales y gradientes.

4. Planos tangentes y rectas normales.
5. Derivadas parciales de orden superior.
6. Aproximación por polinomios de Taylor.
7. Teorema de la función inversa.
8. Teorema de la función implícita.
9. Divergencia, laplaciano y rotacional.
10. Máximos y mínimos: puntos críticos, puntos silla y Hessiano.
11. Integrales dobles: Integrales iteradas, integrales dobles, teorema de Fubini, cálculo de áreas y cambio de variable (coordenadas polares).
12. Integrales triples: cálculo de integrales triples y volúmenes, teorema de cambio de variable, integrales en coordenadas polares, cilíndricas y esféricas.

**Análisis Vectorial**

1. Campos vectoriales
2. Integrales de línea.
3. Integrales de superficie.
4. Teorema de Green.
5. Teorema de la Divergencia.
6. Teorema de Stokes.

**Topología en espacios métricos.**

1. Métricas: discreta, Euclideana, métricas equivalentes.
2. Construcción de espacios métricos: Subespacios, producto de espacios métricos, espacios normados y espacios de funciones.
3. Conjuntos abiertos y conjunto cerrados.
4. Puntos: interiores, de acumulación, adherentes y frontera.
5. Espacios precompactos y espacios separable.
6. Compacidad y equivalencias de compacidad. Invarianza de la compacidad bajo funciones continuas.
7. Conexidad, arcoconexidad e invarianza de la conexidad y de la arcoconexidad bajo funciones continuas.
8. Sucesiones: convergencia de sucesiones, sucesiones de Cauchy.
9. Límites de funciones. Límites parciales e iterados en $\mathbb{R}^n$.
10. Funciones continuas y funciones uniformemente continuas.
11. Espacios normados y sus propiedades generales.
12. Sucesiones de funciones y series de funciones.
    *a*) Convergencia puntual y convergencia uniforme.
    *b*) Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme.
    *c*) Convergencia uniforme y continuidad.
    *d*) Convergencia uniforme y diferenciación.

**Problemas propuestos**

1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Probar que $\lim_{x \to a} f(x) = b$ si y sólo si $\lim_{x \to a^-} f(x) = b = \lim_{x \to a^+} f(x)$.

2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables en $c \in [a, b]$ y $k \in \mathbb{R}$. Probar que:

   a) $kf$ es diferenciable en $c \in [a, b]$ y $(kf)'(c) = kf'(c)$,

   b) $f + g$ es diferenciable en $c \in [a, b]$ y $(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$,

   c) $fg$ es diferenciable en $c \in [a, b]$ y $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + g'(c)f(c)$,

   d) Si $g(c) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ es diferenciable en $c \in [a, b]$ y $(\frac{f}{g})'(c) = \frac{f'(c)g(c) - g'(c)f(c)}{(g(c))^2}$.

3. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ derivable en el punto $a \in X \cap X'$. Si $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ son sucesiones de puntos en $X$ tales que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} y_n = a$ y $x_n < a < y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(a)$.

4. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en $(a, b)$. Demostrar que existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c)(b - a) = f(b) - f(a)$.

5. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $[a, b]$ tal que $f'(x) \neq 0$, para cada $x \in [a, b]$. Probar que:

   a) $f$ es inyectiva y estrictamente creciente o decreciente,

   b) $f^{-1}$ es diferenciable en $f([a, b])$,

   c) Para cada $y \in f([a, b])$, $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

6. Probar que: si $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función, $x_0 \in [a, b]$ y $f$ es diferenciable en $x_0$, entonces $f$ es continua en $x_0$.

7. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua sobre $(a, b)$ con derivada $f'(x)$ finita en todo $x \in (a, b)$ excepto posiblemente en $c \in (a, b)$. Si $\lim\limits_{x \to c} f'(x)$ existe y tiene el valor de $A$, probar que $f'(c)$ también existe y tiene el valor $A$.

8. Usar regla de L' Hôpital para resolver los siguientes problemas:

   *a)* Encontrar el límite: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

   *b)* Si $f''(a)$ existe, mostrar que
   $$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - 2f(a) + f(a - h)}{h^2}.$$

9. Hallar la integral indicada.
   $\int \sqrt{2x^2 - 1}dx$ $\qquad$ $\int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^4}dx$ $\qquad$ $\int \frac{x^3 + x + 1}{x^4 + 2x^2 + 1}dx$

10. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$, $a \in A'$, $b \in B'$ y $f : A \times B \to \mathbb{R}$. Suponga que:

    *a)* $\lim\limits_{y \to b} f(x, y)$ existe para todo $x \in A$.

    *b)* $\lim\limits_{x \to a} f(x, y)$ existe uniformemente sobre $B$.

    Demostrar que los límites iterados $\lim\limits_{x \to a} \lim\limits_{y \to b} f(x, y)$, $\lim\limits_{y \to b} \lim\limits_{x \to a} f(x, y)$ y el doble $\lim\limits_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y)$ existen y todos son iguales.

11. Analizar la diferenciabilidad de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:
    $$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

12. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Verificar que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ existen en cada punto de $\mathbb{R}^2$ y que $f$ no es continua en $(0,0)$.

13. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Probar que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es una función continua en $[a,b]$ y diferenciable en $(a,b)$, entonces existe $x \in (a,b)$ tal que

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|Df(x)\||b-a|$$

14. Evaluar la integral pasando a coordenadas polares.

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4y-y^2}} x^2 dxdy, \qquad \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \operatorname{sen}(x^2+y^2) dydx.$$

15. Convertir a coordenadas cilíndricas y a coordenadas esféricas, y luego utiliza las coordenadas que te convenga para evaluar tal integral.

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^4 xdzdydx,$$

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \rho^2 \sqrt{x^2+y^2+z^2} dzdydx.$$

16. Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas $F(x,y,z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ sobre una partícula que se mueve a lo largo de la recta desde $(0,0,0)$ hasta (5,3,2).

17. Utiliza el Teorema de Green para evaluar la integral de línea.

$$\int_C (x^2 - y^2)dx + 2xydy,$$

$$C : x^2 + y^2 = 16.$$

18. Utilizar el Teorema de la Divergencia para evaluar $\int\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$, donde $S$ es la superficie del sólido $Q$ acotado por las gráficas de las ecuaciones dadas y $\mathbf{F}$ es el campo indicado.

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (xy^2 + \cos z)\mathbf{i} + (x^2 y + \operatorname{sen} z)\mathbf{j} + e^z \mathbf{k},$$

$$S : z = 8 \text{ y } z = \tfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}.$$

19. Evaluar la integral siguiente, usando el Teorema de Stokes:

$$\int_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz,$$

donde $C$ es la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 1$ y la orientación de $C$ es en sentido contrario al de las manecillas del reloj en el plano $xy$.

20. Sea $(X,d)$ un espacio métrico. Verificar que:

    *a*) La función $d_1 : X \times X \to [0,\infty)$ definida como:

$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

    es una métrica sobre $X$.

*b*) La función $d_2 : X \times X \to [0, \infty)$ definida por:

$$d_2(x, y) = \text{mín}\{1, d(x, y)\},$$

es una métrica sobre $X$.

*c*) ¿Las métricas $d_1$ y $d_2$ son equivalentes?

21. Sean $(X, d)$ un espacio métrico, $a \in X$ y $r > 0$. Demostrar que $\overline{B}(a, r) = \{x \in X : d(a, x) \leq r\}$ y $S(a, r) = \{x \in X : d(a, x) = r\}$ son conjuntos cerrados en $X$.

22. En $(\mathbb{R}^2, d_u)$, consideremos el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x \leq 2\}$. Hallar $\text{int}(A)$, $A'$, $\overline{A}$ y $\text{Fr}(A)$. Verificar si $A$ es abierto o cerrado.

23. Sean $(X, d)$ un espacio métrico y $A, B \subset X$. Verificar que:

    *a*) $\overline{A} = \bigcap\{F \subset X : F \text{ es cerrado en } X \text{ y } A \subset F\}$.
    *b*) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.
    *c*) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

24. Sea $(X, d)$ un espacio métrico. Mostrar que las condiciones siguientes son equivalentes.

    *a*) $(X, d)$ es disconexo.
    *b*) Existen subconjuntos cerrados $F$ y $G$ en $X$ tales que $F$ y $G$ son no vacíos, $F \cap G = \emptyset$ y $X = F \cup G$.
    *c*) Existe un subconjunto no vacío y propio $A$ de $X$ tal que $A$ es abierto y cerrado en $X$.
    *d*) Existe un subconjunto propio y no vacío $A$ de $X$ tal que $\text{Fr}(A) = \emptyset$.

25. Sean $k \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{R}^k, d_u)$ el espacio euclídeo, $x, y \in \mathbb{R}^k$, $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ sucesiones en $\mathbb{R}^k$ tales que $\text{lím}_{n\to\infty} x_n = x$ y $\text{lím}_{n\to\infty} y_n = y$. Demostrar:

    *a*) $\text{lím}_{n\to\infty}(x_n + y_n) = (\text{lím}_{n\to\infty} x_n) + (\text{lím}_{n\to\infty} y_n) = x + y$.
    *b*) $\text{lím}_{n\to\infty}(cx_n) = c(\text{lím}_{n\to\infty} x_n) = cx$, donde $c$ es una constante real.
    *c*) Para $k = 1$, $\text{lím}_{n\to\infty}(x_n y_n) = (\text{lím}_{n\to\infty} x_n)(\text{lím}_{n\to\infty} y_n) = xy$.

26. Sean $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$ espacios métricos, $a \in X$ y $f : X \to Y$ una función. Mostrar que $f$ es continua en $a$ si y sólo si, para cada sucesión $\{x_n\}$ en $X$ tal que $x_n \to a$, se tiene que la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge a $f(a)$ en $Y$.

27. Sean $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$ espacios métricos y $f : X \to Y$ una función continua en $X$. Mostrar que si $X$ es compacto, entonces $f$ es uniformemente continua en $X$.

28. Probar que, si $f : A \subseteq X \to Y$ es continua sobre $A$, $X$ es completo, $A$ es totalmente acotado y para cada $a \in A'$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, entonces $f$ es uniformemente continua sobre $A$. Sugerencia: Demuestre el resultado por contradicción.

29. Verificar si $\{f_k\}$ converge puntualmente o uniformemente a alguna función $f$. Justificar su afirmación sin utilizar el Teorema de convergencia uniforme y continuidad.

    *a*) Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $f_k : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ tal que:

    $$f_k(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } -1 \leq x \leq -\frac{1}{k}; \\ \text{sen}(\frac{k\pi x}{2}), & \text{si } -\frac{1}{k} \leq x \leq \frac{1}{k}; \\ 1, & \text{si } \frac{1}{k} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

    *b*) Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $f_k : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $f_k(x) = x^k$.

30. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $f_k : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $f_k(x) = x - x^k$.

    (a) $\{f_k\}$ converge puntualmente?
    (b) $\{f_k\}$ converge uniformemente?

31. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $f_k : A \to \mathbb{R}^n$ una función. Probar que $\{f_k\}$ converge puntualmente si y sólo si para cada $x \in A$, $\{f_k(x)\}$ es una sucesión de Cauchy.

32. Para cada $k \in \mathbb{N}$, considere las funciones $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por la regla de correspondencia $f_k(x) = x^k(1-x)\sqrt{k}$. Probar que $\sum_{k=1}^{\infty}\{f_k\}$ converge uniformemente.

## Referencias para Análisis Matemático


1. T. M. Apostol, *Análisis Matemático*, segunda edición, Ed. Reverte, 1986.
2. R. G. Bartle, *Introducción al Análisis Matemático de una variable*, tercera edición, Ed. Limusa.
3. W. Rudin, *Principios de Análisis Matemático*, tercera edición; Ed. McGraw Hill, 1980.
4. Jerrold E. Marsden, *Elementary Classical Analysis*, W. H. Freeman and Company, 1970.
5. A. Kolmogorov, *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*, segunda edición, Mir; 1975.
6. I. L. Iribarren, *Topología de Espacios Métricos*, Ed. Limusa, 1987.


## Temas de Álgebra

### Espacios vectoriales

1. Definición de espacio vectorial y ejemplos.
2. Subespacio vectorial.
3. Independencia y dependencia lineal.
4. Base y dimensión de un espacio vectorial

### Transformaciones lineales

1. Transformaciones lineales.
2. Álgebra de las transformaciones lineales.
3. Inyectividad y sobreyectividad.
4. Matriz de representación de una transformación lineal.
5. Isomorfismos.
6. Isomorfismos y sus propiedades.

### Espacios con producto interior

1. Definición y propiedades del producto interno.
2. Complemento ortogonal de un subespacio.
3. Proyección ortogonal.
4. Mínimos cuadrados.
5. Bases ortogonales y ortonormales.
6. Proceso de ortogonalización de Gramm-Schmidt.
7. Ortogonalidad.

### Sistemas de ecuaciones y determinantes

1. Definición.
2. Propiedades.
3. Reducción Gauss-Jordan y determinantes.
4. Matriz adjunta y Regla de Cramer.
5. Volumen de un paralelepípedo.

**Diagonalización**

1. Valores y vectores propios.
2. Diagonalizabilidad.
3. Subespacios invariantes.
4. Diagonalización.
5. Diagonalización de matrices simétricas.
6. Formas bilinieles y cuadráticas.

**Grupos**

1. Propiedades.
2. Grupos finitos, infinitos y Abelianos.
3. Definición de subgrupo y ejemplos.
4. Subgrupo generado, grupos cíclicos y producto de subgrupos
5. Teorema de Lagrange y consecuencias.
6. Congruencias, clases laterales y subgrupos normales.
7. Grupo cociente.

**Problemas propuestos**

1. Demostrar que si $H_1$ es un subespacio de cualquier espacio vectorial de dimensión finita $V$, entonces existe un subespacio $H_2$ de $V$ tal que:
$$V = H_1 \oplus H_2.$$
2. Sea $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ la función definida por:
$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a - b - c \\ 2a + b \\ c - 3a \end{pmatrix}.$$
   a) Demuestra que T es una transformación lineal.
   b) Determina si $T$ es invertible, si lo es, obtén $T^{-1}$.
3. Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión finita sobre $F$ y sea $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base ordenada para $V$. Sea $Q$ una matriz invertible de tamaño $n \times n$ con elementos de $F$. Defínase $w_j = \sum_{i=1}^{n} Q_{ij} x_i$, $1 \leq j \leq n$ y hágase $\beta' = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$. Demostrar que $\beta'$ es una base para $V$ y por lo tanto $Q$ es la matriz de cambio de base de $\beta'$ a $\beta$.
4. Sea $V = P_2(\mathbb{R})$ y sean $\beta_1 = \{1 - x^2, 1 + x^2, x\}$, $\beta_2 = \{2 + x - x^2, 2 - x, 5\}$. Obtén la matriz de cambio de base de $\beta_1$ a $\beta_2$.
5. Sea $B$ una matriz invertible de tamaño $n \times n$. Defínase $T : \mathcal{M}_{n\times n}(F) \to \mathcal{M}_{n\times n}(F)$ por $T(A) = B^{-1}AB$. Demostrar que $T$ es un isomorfísmo.
6. Sean $V = \mathbb{C}^3$ y $S = \{(1, 0, i), (1, 2, 1)\}$. Calcular el complemento ortogonal de $S$, $S^{\perp}$.
7. Sea $A$ una matriz de tamaño $n \times n$ con polinomio característico:
$$f(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 + a_0.$$
   Demostrar que $f(0) = a_0 = \det(A)$. Deducir que $A$ es invertible si y sólo si $a_0 \neq 0$.

8. Sea $T$ un operador lineal en un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo $F$. Demuestra que si $g(T) \in P(F)$ y $v$ es un vector propio de $T$ correspondiente al valor propio $\lambda$, entonces $g(T)v = g(\lambda)v$.

9. Sea
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Determina si $A$ es diagonalizable, si lo es, obtén una matriz invertible $Q$ y una matriz diagonal $D$ tal que $A = Q^{-1}DQ$.

10. Describir todos lo operadores lineales $T$ en $\mathbb{R}^2$ tales que $T$ sea diagonalizable y $T^3 - 2T^2 + T = T_0$.

11. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(a, b) = (2a + b, a - 3b)$. Obtén el operador $T^*$.

12. Para $z \in \mathbb{C}$, defínase a $T_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mediante $T_z(u) = zu$. Caracterizar aquellas $z$ para las cuales $T_z$ sea normal, hermitiana o unitaria.

13. Demuestra que una matriz congruente con una matriz diagonal es simétrica.

14. Para la forma cuadrática $K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $K(a, b, c) = 3a^2 + 3b^2 - 2ac$, obtén la forma bilineal semétrica de la cual proviene.

15. Pruébese que todo grupo cíclico finito de orden $n$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_n$.

16. Sea $G$ un grupo, definamos $\phi_g : G \to G$ tal que $\phi_g(a) = gag^{-1}$. Prueba que $\phi_g$ es un isomorfísmo.

17. Muéstrese que todo grupo de orden 45 tiene un subgrupo normal de orden 9.

18. Sea $D$ un dominio entero y $a, b \in D$. Supongamos que $a^n = b^n$ y que $a^m = b^m$ para $m$ y $n$ enteros primos relativos. Pruébese que $a = b$.

19. Sean $R$ un anillo, $U$ un ideal de $R$ tal que $1 \in U$. Pruébese que $U = R$.

20. Demuestra que la característica de un dominio entero o es cero o es un número primo.

## Referencias para Álgebra


1. George Nakos y David Joyner *Álgebra lineal con aplicaciones*, Thomson Editores, 1999.

2. W. Keith Nicholson *Linear algebra with applications*, McGRAW-Ryerson, 2002.

3. Howard Anton, *Introducción al algebra lineal*, Limusa 2002.

4. Stanley I. Grossman, *Álgebra Lineal*, McGraw-Hill Iberoamericana, 2008.

5. , Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, Lawrence E. Spence, *Álgebra lineal*, Printice-Hall, 1997.

6. Serge Lange, *Introducción al álgebra lineal*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1990.

7. Steven J. León, *Linear algebra with aplications*, Prentice-Hall, 1980.

8. I. N. Herstein, *Álgebra Moderna: grupos, anillos, campos , teoría de Galois*, 2da. Ed. Trillas, 1990.


## Temas de Ecuaciones diferenciales

### EDO's de primer orden

1. Separables.

2. Lineales.

3. Teorema de existencia y unicidad.

**EDO's de segundo orden**

1. Homogéneas y no homogéneas.
2. Ecuaciones de Cauchy-Euler.
3. Teorema de existencia y unicidad de soluciones.

**Soluciones en series de potencias**

1. Soluciones en torno a puntos ordinarios.
2. Solución en torno a puntos singulares regulares.
3. Método de Frobenius.
4. Polinomios de Legendre $P_n(x)$.
5. Funciones de Bessel.

**Transformada de Laplace**

1. Propiedades fundamentales.
2. Transformada inversa.
3. Problemas con valores iniciales.

**Sistemas de ecuaciones lineales y no lineales**

1. Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes.
2. Sistemas autónomos y estabilidad.
3. Sistemas casi lineales.
4. Teoría de Liapunov.
5. Soluciones periódicas y ciclos límite.

**Ecuaciones diferenciales parciales y series de Fourier**

1. Series de Fourier.
2. Separación de variables.
3. La ecuación de onda.
4. La ecuación de Laplace.
5. La ecuación de calor.

**Problemas con valores en la frontera y teoría de Sturm Liouville**

1. Problemas de Sturm Liouville con valores en la frontera.
2. Problemas no homogéneos con valores en la frontera.
3. Problemas singulares de Sturm Liouville.
4. Series de funciones ortogonales: Convergencia en la media.

**Problemas propuestos**

1. Suponga que la ecuación diferencial de primer orden $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ tiene una familia uniparamétrica de soluciones y que $f(x, y)$ satisface la hipótesis del Teorema de existencia y unicidad en alguna región rectangular $R$ del plano XY. Explique porqué dos curvas solución diferentes no se pueden intersectar o ser tangentes en algún punto de la región rectangular $R$.

2. Considere el problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2(x)}y = x, \qquad y(0) = 2.$$

Utilice la integración definida para mostrar que el factor integrante para la ecuación diferencial se escribe como:

$$\mu(x) = \exp\left(\int_0^x \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2(t)}dt\right)$$

y que la solución del problema con valor inicial es

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\int_0^x s\mu(s)ds + \frac{2}{\mu(x)}.$$

3. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

   a) $\frac{dx}{dt} = \frac{x^2 + t\sqrt{t^2 + x^2}}{tx}$
   
   b) $(2x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0$

4. Explique porqué es posible expresar cualquier ecuación diferencial homogénea $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ en la forma $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$.

5. Resuelva la siguiente ecuación diferencial $(x + 2)^2y'' - (x + 2)y' + y = \ln(x + 2)$.

6. Suponga que $y_1, y_2, y_3, ..., y_k$ son $k$ soluciones no triviales de una ecuación diferencial homogénea de $n-$ésimo orden con coeficientes constantes y que $k = n + 1$. ¿Es el conjunto de soluciones linealmente dependiente o independiente en $(-\infty, \infty)$? Explique.

7. Encontrar la solución general en series de potencias de la ecuación diferencial $y'' + xy' + 2y = 0$.

8. Encontrar la solución del problema con valores iniciales: $(x^2 - 1)y'' + 3xy' + xy = 0$, $y(0) = 4$ e $y'(0) = 6$.

9. Utilice el método de Frobenius para encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$3tx'' + x' - x = 0.$$

10. Utilice el método de Frobenius para encontrar la solución general de la ecuación diferencial $2x^2y'' + x'y + (x-5)y = 0$, donde $0 < x < R$.

11. Demuestra que la transformación $y = \frac{u(x)}{\sqrt{x}}$ reduce la ecuación de Bessel de orden $p$, $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$ en la forma:

$$u'' + \left[1 + \left(\frac{1}{4} - p^2\right)\frac{1}{x^2}\right]u = 0.$$

12. Definimos la función de Bessel de primera especie de orden $p$ como:

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}.$$

Demuestra que $\frac{d}{dx}\left[x^pJ_p(kx)\right] = kx^pJ_{p-1}(kx)$.

13. Demostrar que transformada de la Laplace es lineal.

14. Demostrar que $\mathcal{L}\{f''\} = s^2\mathcal{L}\{f\} - sf(0) - f'(0)$.

15. Demuestre la linealidad de la transformada inversa de Laplace.

16. Hallar la transformada inversa de Laplace de la función:

$$F(s) = \frac{2s+1}{(s-1)^2+1}.$$

17. Hallar la solución al problema de valor inicial utilizando transformada de Laplace: $x' = -4x - 1$ e $x(0) = 3$.

18. Resolver el problema con valores iniciales utilizando transformada de Laplace: $x' = x + y$, $y' = -x + y$, $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$.

19. Una masa $m$ en un resorte con constante $k$ satisface la ecuación diferencial $mu'' + ku = 0$, donde $u(t)$ es el desplazamiento de la masa en el momento $t$ a partir de su posición de equilibrio.

    *a*) Sea $x_1 = u$, $x_2 = u'$. Demuestre que el sistema resultante es
    $x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{pmatrix} x.$

    *b*) Encuentre los eigenvalores de la matriz para el sistema del inciso anterior.

    *c*) Trace varias trayectorias del sistema. Elija una de estas trayectorias y trace las gráficas correspondientes de $x_1$ contra $t$ y de $x_2$ contra $t$. Trace ambas gráficas en los mismos ejes.

    *d*) ¿Cuál es la relación entre los eigenvalores de la matriz de los coeficientes y la frecuencia natural del sistema de masa y resorte?

20. Dos especies de peces que compiten entre sí por el alimento, pero no se depredan una a la otra, son el pez sol azul (*lepomis macrochirus*) y el pez sol rojo (*lepomis microloptus*). Suponga que en un estanque se puebla con estos peces, y sean $x$ y $y$ las poblaciones de las variedades azul y roja, respectivamente, en el instante $t$. Suponga además que la competencia está modelada por las ecuaciones

$$\begin{aligned} dx/dt &= x(\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y), \\ dy/dt &= y(\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x). \end{aligned}$$

    *a*) Si $\epsilon_2/\alpha_2 > \epsilon_1/\sigma_1$ y $\epsilon_2/\sigma_2 > \epsilon_1/\alpha_1$, demuestre que las únicas poblaciones de equilibrio en el estanque son cero peces, cero peces sol azules o cero peces sol rojos. ¿Qué ocurrirá?

    *b*) Si $\epsilon_1/\sigma_1 > \epsilon_2/\alpha_2$ y $\epsilon_1/\alpha_1 > \epsilon_2/\sigma_2$, demuestre que las únicas poblaciones de equilibrio en el estanque son cero peces, cero peces sol azules o cero peces sol rojos. ¿Qué ocurrirá?

21. Un caso especial de la ecuación de Liénard es $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} + g(u) = 0$, donde $g(0) = 0$, $g(u) > 0$ para todo $0 < u < k$ y $g(u) < 0$ para $-k < u < k$. Haciendo $x = u$, $y = du/dt$, demuestre que el origen es un punto crítico del sistema resultante. Puede considerarse que esta ecuación describe el movimiento de un sistema de masa y resorte con amortiguamiento proporcional a la velocidad y fuerza restauradora no lineal. Utilizando una función de Liapunov adecuada, demuestre que el origen es un punto crítico estable, pero observe que incluso con amortiguamiento, no es posible concluir la estabilidad asintótica usando esta función de Liapunov.

22. Demuestre que el sistema

$$\begin{aligned} dx/dt &= -y + xf(r)/r, \\ dy/dt &= x + yf(r)/r \end{aligned}$$

    tiene soluciones periódicas que corresponden a los ceros de $f(r)$. ¿Cuál es el sentido del movimiento sobre las trayectorias cerradas en el plano fase? Sea $f(r) = r(r-2)^2(r^2-4r+3)$. Determine todas las soluciones periódicas y determine sus características de estabilidad.

23. Supóngase que una varilla de longitud $L = 50cm$ se sumerge en vapor hasta que su temperatura sea $u_0 = 100^0C$ a todo lo largo. En el instante $t = 0$ su superficie lateral se aísla y sus dos extremos se sumergen en hielo a $0^0C$. Calcular la temperatura de la varilla en su punto medio después de media hora (1800 segundos), si ella está hecha de acero $k$ =0.5.

24. Supóngase que una delgada placa rectangular ocupa la región plana $0 < x < a$, $0 < y < b$; que sus caras superior e inferior están aisladas y que sus cuatro aristas se mantienen a temperatura cero. Si la placa tiene la función de temperatura inicial $u(x, y, 0) = f(x, y)$, determinar $u(x, y, t)$.

25. Determinar la temperatura de estado estable en el cilindro circular recto de radio 2 y altura 4, si los datos en la frontera son $u(2, z) = 0$, $0 < z < 4$, $u(r, 0) = u_0$, $u(r, 4) = 0$, $0 < r < 2$. Sugerencia: La temperatura $u$ tiene simetría radial.

26. En algunos problemas de pandeo el parámetro eigenvalor aparece en las condiciones en la frontera y en la ecuación diferencial. Se presenta uno de tales casos cuando uno de los extremos de la columna está empotrado y el otro está libre. En este caso la ecuación diferencial $y^{(4)} + \lambda y'' = 0$ debe resolverse sujeta a las condiciones en la frontera $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(L) = 0$, $y'''(L) + \lambda y'(L) = 0$. Encuentre el eigenvalor más pequeño y la eigenfunción correspondiente.

27. Demuestre que si $a_n$ es el $n-$ésimo coeficiente de Fourier de una función cuadráticamente integrable $f$, entonces el $\lim a_n = 0$, cuando $n \to \infty$.

28. Demuestre que la serie $\phi_1(x) + \phi_2(x) + \phi_3(x) + ...$ no puede ser la serie de eigenfunciones de ninguna función cuadráticamente integrable. Nota: Las funciones $\phi_i(x)$, $i = 1, 2, ...$ son las eigenfunciones normalizadas del problema de Sturm-Liouville:

$$\begin{aligned} -[p(x)y']' + q(x)y &= \lambda r(x)y, \ 0 < x < 1, \\ \alpha_1 y(0) + \alpha_2 y'(0) &= 0, \\ \beta_1 y(1) + \beta_2 y'(1) &= 0. \end{aligned}$$

## Referencias para Ecuaciones Diferenciales


1. Boyce W. E., DiPrima R. C., *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, quinta edición, Limusa Wiley, 2010.

2. Hirsh M. W., Smale S., *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal*, Alianza editorial, 1974.

3. Shepley L. Ross, *Differential Equations*, Denklemler KORKMAZ, 1984.

4. Dennis G. Zill, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*, Cengage Learning, Novena edición, 2011.