Universidad Tecnológica de la Mixteca

División de Estudios de Posgrado

Doctorado en Modelación Matemática

Examen de Admisión 2016

*Nombre del aspirante:*____*Fecha de Aplicación:*____________

Elija cinco problemas y tiene tres horas, a partir del momento que se le indique, para resolverlos correctamente.

1. Suponga que existe un laboratorio de investigación con animales en la Ciudad de Oaxaca, la cual cuenta con una población de 3801962 personas (según el censo de población y vivienda INEGI 2010). Un mono con el virus Ébola ha escapado de su cautiverio en el laboratorio y ha infectado a un empleado. Este empleado se reporta al Hospital General Dr. Aurelio Valdivieso con síntomas del Ébola. El Director del Centro de Enfermedades Infecciosas (CEI) en la Ciudad de México, donde Usted trabaja, recibe la información y le pide que modele la propagación de la enfermedad. Construya un modelo discreto para entregar a su jefe, que determine el número de personas que se infectarán en el hospital y en la ciudad, en el transcurso de las próximas 2 semanas. Haga las suposiciones que considere convenientes.

2. Considerar dos especies cuya supervivencia depende de su cooperación mutua. Tomemos como ejemplo una especie de abeja que se alimenta principalmente de néctar de una especie de planta y al mismo tiempo que poliniza las plantas. Un modelo simple de este mutualismo está dada por el sistema autónomo:

$$\frac{dx}{dt} = -ax + bxy,$$
$$\frac{dy}{dt} = -mx + nxy.$$

   a) ¿Qué suposiciones implícitamente se están haciendo sobre el crecimiento de cada especie, en la falta de cooperación?
   b) Interprete las constantes en términos del problema físico.
   c) ¿Cuáles son los estados de equilibrio?
   d) Realice un análisis gráfico e indique las direcciones de las trayectorias en el plano fase.
   e) Encuentre una solución analítica y grafique su trayectoria típica en el plano fase.
   f) Interprete los resultados predichos por el análisis gráfico. ¿Cree Usted que el modelo es realista? ¿Por qué?

3. Utilizando la fórmula integral de Cauchy, calcular:

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^2(z-1)}dz,$$

   donde γ es el círculo con centro en el origen y radio 2.

4. Suponga que f es una función continua y que:

$$\int_0^x t f(t)\, dt = \operatorname{sen} x - \cos x.$$

Determinar $f(\frac{\pi}{2})$ y encontrar $f'(x)$.

5. Encontrar el radio de convergencia de la serie:

$$\Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^n.$$

6. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones reales continuas sobre $\mathbb{R}$, definidas mediante:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ n, & \text{si } x = \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{si } x \geq \frac{2}{n}, \end{cases}$$

afin (o sea de la forma $ax + b$), sobre los intervalos $[0, \frac{1}{n}]$ y $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$.

a) Demostrar que $f_n \in L^1(v)$ y que $f_n \to 0$ puntualmente pero no en $L^1(v)$.

b) ¿Cuál es la hipótesis del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue que no se cumple?

7. Considerando $V = P_2(\mathbb{R})$, sean $\beta_1 = \{1 - x^2, 1 + x^2, x\}$ y $\beta_2 = \{2 + x - x^2, 2 - x, 5\}$. Obtener la matriz de cambio de base de β_1 a β_2.

8. Determinar si la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ es diagonalizable, si lo es, encontrar una matriz Q tal que $Q^{-1}AQ$ sea una matriz diagonal.

9. Sean G un grupo, $g \in G$ y $\phi_g : G \to G$ tal que $\phi_g(a) = gag^{-1}$, para cada $a \in G$. Probar que ϕ_g es un isomorfísmo.

Universidad Tecnológica de la Mixteca

División de Estudios de Posgrado

Doctorado en Modelación Matemática

Examen de Admisión 2015

*Nombre del aspirante:*____

Elija por lo menos cinco problemas y tiene tres horas, a partir del momento que se le indique, para resolverlos correctamente.

1. Sea $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ la función definida por $T(f) = xf + f'$. Probar que T es una trasformación lineal, encontrar una base para $N(T)$ y una base para $R(T)$, calcular la nulidad de T, el rango de T y verifica el teorema de la dimensión. Finalmente, determinar si T es inyectiva y/o sobreyectiva.

2. Determinar si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3, & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable, si lo es, encontrar una matriz Q tal que $Q^{-1}AQ$ sea una matriz diagonal.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por:
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{si } x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & \text{si } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$
Hallar los puntos en los cuales la función f es diferenciable.

4. Sea (X,d) un espacio métrico y consideremos $(\mathbb{R}, d_u)$, donde d_u es la métrica usual en $\mathbb{R}$. Sean $A \subset X$ y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que:
   a) Si A es conexo y compacto, entonces $f(A)$ es un intervalo cerrado y acotado.
   b) Si A es conexo, entonces para cualesquiera $a, b \in A$ con $f(a) < f(b)$ y para cada $r \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < r < f(b)$, existe $c \in A$ tal que $f(c) = r$ (Teorema del Valor intermedio generalizado).

5. Resolver el problema con valores iniciales dado, en términos de $y(t)$, usando el método de transformadas de Laplace.
$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0, \quad y(0) = -4, y'(0) = 4, y''(0) = -2$$

6. Justificar que si $y = \phi(x)$ es una solución de la ecuación diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ en el intervalo (a,b), donde p, q y g son dos veces diferenciables, entonces la cuarta derivada de $\phi(x)$ existe en (a,b).

EXAMEN DE ADMISIÓN 2014

*Nombre del aspirante:*____

Elija por lo menos cinco problemas y tiene tres horas, a partir del momento que se le indique, para resoverlos correctamente.

1. Determine dos soluciones diferentes del problema con condición inicial

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3}, \quad y(0) = 0$$

¿Por qué la existencia de soluciones diferentes no contradice al teorema de existencia y unicidad?

2. Resuelve el siguiente problema: Un cuerpo de masa $m = 2kg$, se lanza verticalmente en el aire con una velocidad inicial $v_0 = 3m/s$. El cuerpo encuentra una resistencia al aire proporcional a su velocidad. Hallar:

(a) la ecuación del movimiento,

(b) la velocidad en el tiempo $t = 20s$,

(c) el tiempo necesario para que el cuerpo llegue a su altura máxima.

3. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determine si la matriz A es diagonalizable , y si A es diagonalizable, encuentre una matriz Q tal que $Q^{-1}AQ$ es una matriz diagonal.

(b) Encuentre la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{array}{llll} x_1' & = 3x_1 & +x_2 & +x_3 \\ x_2' & = 2x_1 & +4x_2 & +2x_3 \\ x_3' & = -x_1 & -x_2 & +x_3 \end{array}$$

4. Determine si el siguiente sistema de ecuaciones lineales tiene solución, ¿es única?:

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & +3x_3 & -x_4 = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 = & 1 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 = & 1 \\ 4x_1 & +x_2 & +8x_3 & -x_4 = & 0 \end{array}$$

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Verificar que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ existen en cada punto de $\mathbb{R}^2$ y que f no es continua en $(0,0)$.

6. Sean $f : X \to Y$ una función entre espacios normados y $x_0 \in X$. Verificar que las siguientes proposiciones son equivalentes:

(a) La función f es continua en x_0.

(b) Para cada vecindad V de $f(x_0)$, existe una vecindad U (que depende de V) de x_0 tal que si $x \in U$, entonces $f(x) \in V$.

(c) Para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que si $||x - x_0|| < \delta(\epsilon)$, entonces $||f(x) - f(x_0)|| < \epsilon$.

(d) Para cada sucesión $\{x_n\}$ en X que converge a x_0, se tiene que la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge a $f(x_0)$.